Simplexe

Méthodes, Techniques et Outils pour le Raisonnement

Michaël Perrot[1]
michael.perrot@univ-st-etienne.fr

Basé sur les cours d'E. Fromont[1], M. Bierlaire[2] et C. Jard[3]

[1]Université Jean Monnet

[2]École Polytechnique Fédérale de Lausanne

[3]École Nationale Supérieure de Cachan

M1 Web Intelligence, 2014/2015

Aide à la décision

C'est un domaine visant à concevoir des outils informatiques pour aider un décideur à analyser un problème ou une situation, et à lui fournir des solutions, éventuellement **hiérarchisées**, sur la base des **critères** logiques qu'il aura sélectionnés.

L'informatique décisionnelle (business intelligence) regroupe les moyens, outils et méthodes qui permettent de collecter, consolider, modéliser et restituer les données, matérielles ou immatérielles, d'une entreprise en vue d'offrir une aide à la décision et de permettre aux responsables de la **stratégie d'entreprise** ou d'une **collectivité** d'avoir une vue d'ensemble de l'activité traitée (entrepôts de données).

Recherche opérationnelle

La **recherche opérationnelle** travaille dans ce domaine à la production de **modèles** réalistes du problème d'un décideur dans son contexte, puis à la résolution des problèmes, et hiérarchisation des solutions possibles.
C'est l'art de dégager des alternatives et d'en prévoir quantitativement les conséquences pour permettre la décision la plus sage.

Historique

Théorie de la décision
Pascal (1654)
Fermat (1654)
Bernoulli (1713)

Programmation mathématique
Fourier (1824)

Combinatorique
Théorie des graphes
Sainte-Laguë (1926)
König (1936)

↓

Recherche opérationnelle
Première application militaire,
Bataille aérienne de Grande-Bretagne :
Meilleure utilisation des moyens disponibles.

↓

Simplexe
Premier *grand* algorithme (1947)

↓

Premier ordinateur
Première application commerciale (1956)

Mots clés

- **Modélisation** : Simplification de la réalité pour pouvoir en appréhender certains aspects
- **Optimisation** : Identification d'une configuration qui soit meilleure que toute autre suivant un critères spécifique
- **Simulation** : Représentation artificielle d'un fonctionnement réel

Approche statistique et Recherche opérationnelle

Approche statistique

Soit une **réalité**, un **observateur** obtient des **données** à partir desquelles il peut faire des **estimations** pour dériver un **modèle**.

Recherche opérationnelle

Soit un **modèle** de **description**, d'**optimisation** et de **prédiction** qui permet de prendre une **décision** qui est confrontée à la **réalité**. Le modèle est **amélioré** en fonction de la **qualité** de la décision.

Éléments de la théorie des graphes (L2 et L3)

- Structure simple, approches multiples
- Sommets, arcs, adjacence, degrés
- Graphe partiel, sous-graphe, graphe complémentaire
- Les représentations d'une graphe et les matrices associées
- Chaîne, chemin, circuit, connexité
- Arbres
- Problème du plus court chemin : définition, exemples, algorithmes

Applications de la théorie des graphes

- Programmation dynamique
- Problèmes d'ordonnancement
- Flots et réseaux de transport : Algorithme de Ford-Fulkerson
- Problèmes d'affectation
- Problèmes de transport

Optimisation

Le but est d'analyser et de résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à déterminer le **meilleur** élément d'un ensemble, au sens d'un **critère** quantitatif donné.

Le système étant représenté par un **modèle mathématique** décrivant son état ou son contrôle à l'aide de variables (inconnues et liées par des équations), le problème consiste à trouver des **solutions** satisfaisant un **objectif** quantitatif tout en respectant d'éventuelles **contraintes**.

Exercice 1

La société Gepetto, Inc., produit deux types de jouets en bois :

- Les **soldats** sont vendus **27€** et coûtent **10€** de matériel brut.
  - Coûts généraux : **14€** par soldat.
  - Quantité de travail : **1 h** de menuiserie et **2 h** de finissage.
- Les **trains** sont vendus **21€** et coûtent **9€** de matériel brut.
  - Coûts généraux : **10€** par train.
  - Quantité de travail : **1 h** de menuiserie et **1 h** de finissage.

Au maximum, on dispose de **80 h** de menuiserie et de **100 h** de finissage par semaine. La demande est illimitée pour les trains mais est au maximum de **40** soldats par semaine.

Comment maximiser les bénéfices de la Geppetto, Inc. ?

Formulation

Sous quelles formes présenter le problème d'optimisation ?

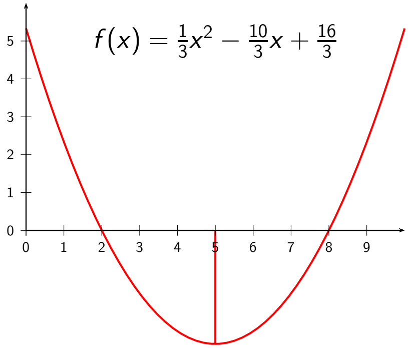
- Forme **standard** : Contraintes d'**égalité** et variables **positives ou nulles**.
- Forme **canonique** : Contraintes d'**infériorité**.

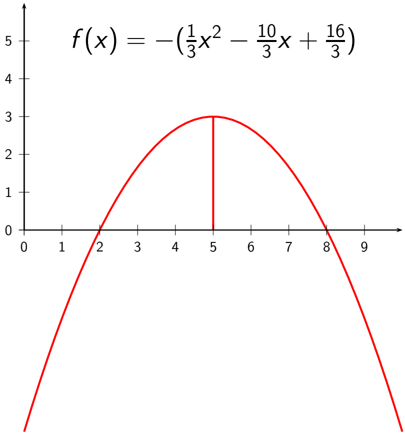
La forme choisie dépend des **exigences des algorithmes** et nécessite bien souvent de **transformer** le problème.

Formulation

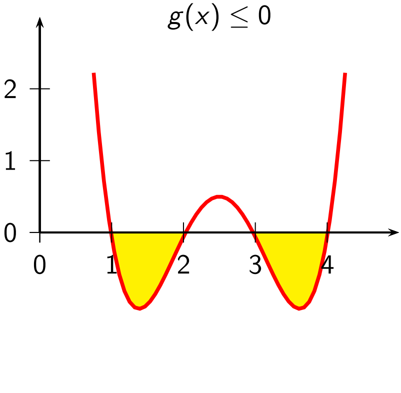
- Fonction objectif
  - **min f(x)**
  - **max f(x)**
- Contraintes
  - **g(x)** $\leq$ **constante**
  - **g(x)** $\geq$ **constante**
  - **g(x)** $=$ **constante**
- Contraintes de bornes
  - $\mathbf{l} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{u}$
- Contraintes de signe
  - $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$

Formulation : Transformations





Formulation : Transformations



Règles de transformations : Forme canonique $\rightarrow$ Forme standard

- $\max f(x) \Rightarrow -\min(-f(x))$
- $g(x) \leq 0 \Rightarrow -g(x) \geq 0$
- $g(x) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) + y & = 0 \\ y & \geq 0 \end{cases}$
- $g(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) & \leq 0 \\ g(x) & \geq 0 \end{cases}$
- $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x & = y - z \\ y & \geq 0 \\ z & \geq 0 \end{cases}$
- $x \geq a \Rightarrow \begin{cases} x & = y + a \\ y & \geq 0 \end{cases}$

Formulation, exemple : Réécriture des contraintes

$$\max -x^2 + \sin y$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}
6x - y^2 &\geq 1 \\
x^2 + y^2 &= 3 \\
x &\geq 2 \\
y &\in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$-\min x^2 - \sin y$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}
-6x + y^2 + 1 &\leq 0 \\
x^2 + y^2 - 3 &\leq 0 \\
-x^2 - y^2 + 3 &\leq 0 \\
x &= x_1 + 2 \\
x_1 &\geq 0 \\
y &= y_1 - y_2 \\
y_1 &\geq 0 \\
y_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Formulation, exemple : Remplacement des variables

$\max -x^2 + \sin y$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 6x - y^2 &\geq 1 \\ x^2 + y^2 &= 3 \\ \\ x &\geq 2 \\ y &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$-\min (x_1+2)^2 - \sin(y_1 - y_2)$

sous contraintes

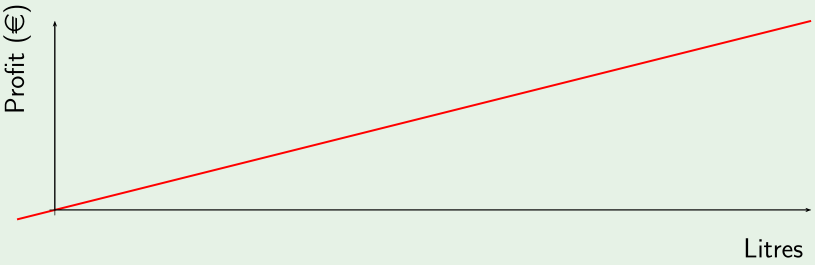
$$\begin{aligned} -6(x_1+2) + (y_1-y_2)^2 + 1 &\leq 0 \\ (x_1+2)^2 + (y_1-y_2)^2 - 3 &\leq 0 \\ -(x_1+2)^2 - (y_1-y_2)^2 + 3 &\leq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Approche intuitive

Problème

Une entreprise gagne 5€ chaque fois qu'elle vend 1 litre de produit chimique. Elle désire maximiser son profit.

Graphe



Approche intuitive

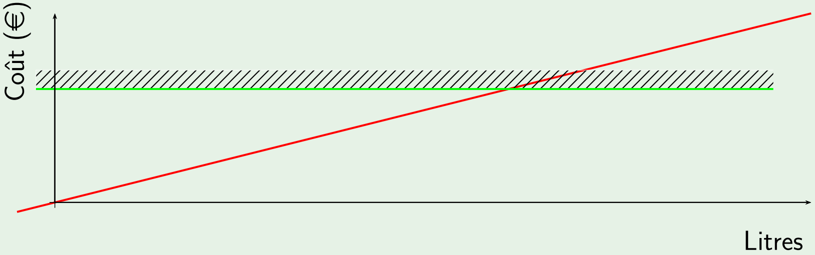
- Observations :
  - Fonction objectif linéaire.
  - Pas de contraintes.
  - Solution infinie.
- Commentaire :
  - La solution est toujours infinie lorsque la fonction objectif est linéaire et qu'il n'y a pas de contraintes.

Approche intuitive

Problème

Un laboratoire achète 30€ le litre de produit chimique. Il dispose d'un budget de 1000€. Quelle quantité maximale peut-il acheter ?

Graphe



Approche intuitive

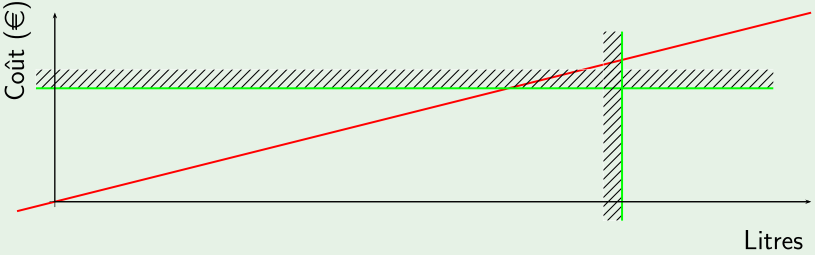
- Observations :
  - Réponse évidente : 1000 / 30 litres.
  - Bien que l'on puisse dépenser 1000€ **ou moins**, on dépense **exactement** 1000€.
- Commentaire :
  - Si la fonction objectif et les contraintes sont linéaires, il y a au moins une contrainte active à la solution. On dit que la contrainte $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ est active en $\mathbf{x}^*$ si, et seulement si, $\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Approche intuitive

Problème

Un laboratoire achète 30€ le litre de produit chimique. Il dispose d'un budget de 1000€ et doit en acheter au minimum 40 litres. Quelle quantité maximale peut-il acheter ?

Graphe



Approche intuitive

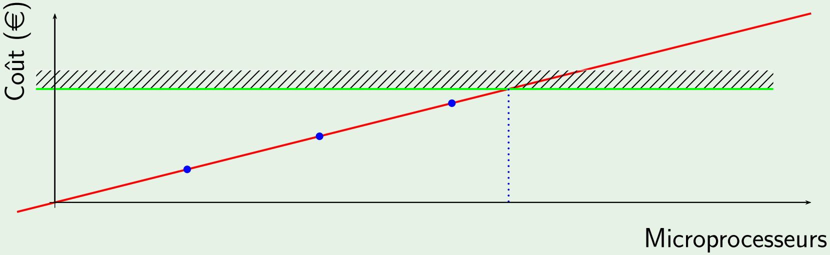
- Observations :
  - Problème impossible.
  - Contraintes incompatibles.
- Commentaire :
  - La solution peut ne pas exister. On dit que le problème ne possède pas de solution admissible.

Approche intuitive

Problème

Un laboratoire achète 300€ un microprocesseur. Il dispose d'un budget de 1000€. Quelle quantité maximale peut-il acheter ?

Graphe



Approche intuitive

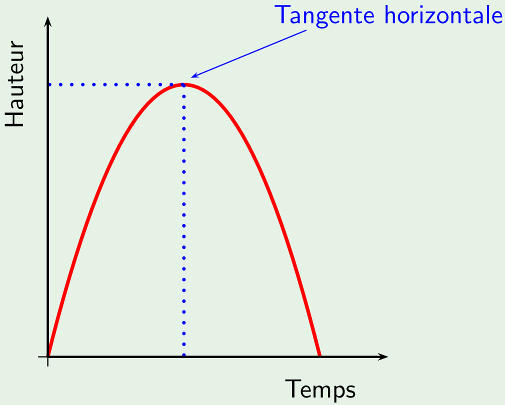
- Observations :
  - Impossible d'acheter des parties de microprocesseurs.
  - Bien que la fonction objectif et les contraintes soient linéaires, le budget ne sera pas totalement dépensé.
- Commentaire :
  - Lorsque les variables sont **entières**, les résultats **théoriques** peuvent être différents.

Approche intuitive

Problème

Un objet est lancé à la verticale à la vitesse de 50 m/s. Quand atteindra-t-il son point culminant ?

Graphe

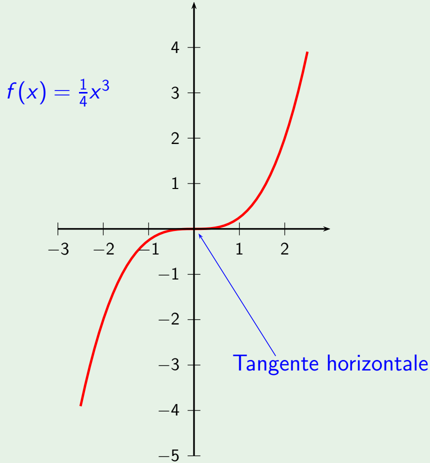


Approche intuitive

- Observations :
  - Fonction objectif non linéaire.
  - Pas de contraintes.
  - Solution finie.
- Commentaire :
  - Si la fonction objectif est non linéaire, une solution finie peut exister, même en l'absence de contraintes. À la solution, la **tangente** à la courbe est **horizontale** (i.e. la **dérivée** est nulle).

Approche intuitive

Graphe



La tangente ne correspond ni à un **maximum**, ni à un **minimum**.

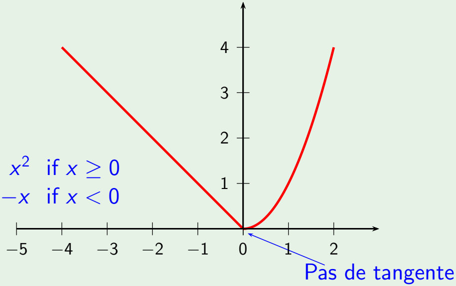
Approche intuitive

- Observations :
  - Pas de solution finie.
  - Présence d'une tangente horizontale.
- Commentaire :
  - Une solution finie n'est pas garantie par la non linéarité de la fonction objectif : une tangente horizontale n'identifie pas nécessairement une solution.

Approche intuitive

Graphe

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$



Approche intuitive

- Observations :
  - La fonction n'est pas dérivable à la solution :
    $\lim_{\alpha \overset{<}{\longrightarrow} 0} \frac{f(0+\alpha)-f(0)}{\alpha} = -1$
    $\lim_{\alpha \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{f(0+\alpha)-f(0)}{\alpha} = 0$
- Commentaire :
  - Attention aux fonctions non différentiables.

Approche intuitive

Géographiquement

- Le plus haut sommet du **monde** est l'**Everest**.
- Le plus haut sommet d'**Asie** est l'**Everest**.
- Le plus haut sommet d'**Europe** est l'**Elbrouz**.

Mathématiquement

$$f(x^*) = \max_{x \in X \subset \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$f(y^*) = \max_{y \in Y \subset \mathbb{R}^n} f(y)$$

$$X \subseteq Y \Rightarrow f(x^*) \leq f(y^*)$$

Types de problèmes

Une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une **fonction linéaire** si, et seulement si, il existe un ensemble de constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ telles que :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n.$$

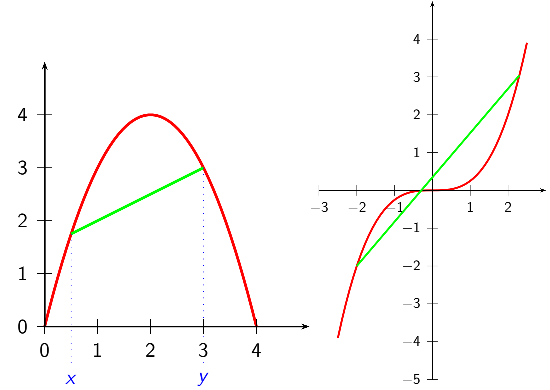
La fonction objectif et les contraintes sont-elles linéaires ou non-linéaires ?

Types de problèmes : Concavité et convexité

On dit qu'une fonction est concave sur X si, $\forall x, y \in X$, $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$, elle respecte l'**inégalité de Jensen** (1906) :

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Si une fonction f est **concave** alors la fonction $-f$ est **convexe**.



Types de problèmes : Résumé

- linéaire / non-linéaire
- contraintes / pas de contraintes
- convexe / non-convexe
- concave / non-concave
- différentiable / non-différentiable
- variables continues / entières

Programmation linéaire

On appelle Programmation Linéaire le problème mathématique qui consiste à **optimiser** (maximiser ou minimiser) une **fonction linéaire** de plusieurs variables qui sont reliées par des **relations linéaires** appelées **contraintes**.

Un des algorithmes utilisé pour résoudre ce type de problèmes est la méthode du **simplexe**. C'est un algorithme itératif dont l'idée générale est la suivante :

1. On considère x_0 une solution initiale
2. Tant que x_k n'est pas une solution acceptable (optimale) on calcule x_{k+1} en utilisant x_k : $\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$

Exemple : Raffinerie

Une raffinerie produit 4 types de produits finis (essence, kérosène, mazout et résidu) à partir de 2 types de pétrole brut (brut1 et brut2) avec les paramètres suivants :

	Produit	€/baril
Achat	Brut1	24
	Brut2	15
Vente	Essence	36
	Kérosène	24
	Mazout	21
	Résidu	10

	Rendement (%)		Production maximale (baril/jour)
	Brut1	Brut2	
Essence	80	44	24000
Kérosène	5	10	2000
Mazout	10	36	6000
Résidu	5	10	
Cout de production (€/baril)	0.5	1	

Comment optimiser la production de la raffinerie ?

Exemple : Modèle mathématique

- **Variables de décision** (Information recherchée) :
  - P1, P2 : nombre de barils/jour de Brut1 et Brut2 raffinés.
  - X1, X2, X3, X4 : nombres de barils/jour obtenus pour chaque produit.
- **Contraintes** :
  - $0.80\ P1 + 0.44\ P2 = X1$
  - $0.05\ P1 + 0.10\ P2 = X2$
  - $0.10\ P1 + 0.36\ P2 = X3$
  - $0.05\ P1 + 0.10\ P2 = X4$
  - $X1 \leq 24000$
  - $X2 \leq 2000$
  - $X3 \leq 6000$
  - $P1, P2 \geq 0$
- **Fonction objectif** (Maximisation du Profit = Vente - Achat - Coût de production) :
  - $\max\ 36\ X1 + 24\ X2 + 21\ X3 + 10\ X4 - 24\ P1 - 15\ P2 - 0.5\ P1 - P2$

Exemple : Simplification du modèle

On commence par supprimer les variables inutiles :

- **Fonction objectif** :
  - max 8.1 P1 + 10.8 P2
- **Contraintes** :
  - 0.80 P1 + 0.44 P2 $\leq$ 24000
  - 0.05 P1 + 0.10 P2 $\leq$ 2000
  - 0.10 P1 + 0.36 P2 $\leq$ 6000
  - P1, P2 $\geq$ 0

On passe ensuite en forme standard :

- **Fonction objectif** :
  - max 8.1 P1 + 10.8 P2
- **Contraintes** :
  - 0.80 P1 + 0.44 P2 + E1 = 24000
  - 0.05 P1 + 0.10 P2 + E2 = 2000
  - 0.10 P1 + 0.36 P2 + E3 = 6000
  - P1, P2, E1, E2, E3 $\geq$ 0

Définitions

- Forme standard :
  - **Fonction objectif** :
    - ⋆ $\max \sum_{j=1\ldots n} c_j x_j$
  - **Contraintes** :
    - ⋆ $\sum_{j=1\ldots n} a_{ij} x_j = b_i \; (1 \leq i \leq m)$
    - ⋆ $x_j \geq 0 \; (1 \leq j \leq n)$
- Une solution $(x_1, \ldots, x_n)$ est **réalisable** si elle satisfait toutes les contraintes.
- Une solution est **optimale** si elle est réalisable et si elle maximise l'objectif. Il peut y avoir plusieurs solutions optimales.

Définitions

Il n'existe pas forcément de solution optimale, soit parce qu'il n'existe pas de solution réalisable, soit parce qu'il n'existe pas de valeur optimale finie. Par exemple, on considère le programme linéaire suivant :

- **Fonction objectif** :
  - $\max x_1 - x_2$
- **Contraintes** :
  - $-2x_1 + x2 \leq -1$
  - $-x_1 - 2x2 \leq -2$
  - $x_1, x_2 \geq 0$

Il existe effectivement des solutions réalisables comme $(1, 1)$ ou $(5, 0)$ mais on peut toujours trouver une meilleure solution.

La méthode du simplexe (Dantzig 1955)

On part toujours de la **forme standard** du problème. Considérons le problème :

- **Fonction objectif** :
  - max $z = 5\ X1 + 4\ X2 + 3\ X3$
- **Contraintes** :
  - $2\ X1 + 3\ X2 + X3 + X4 = 5$
  - $4\ X1 + X2 + 2\ X3 + X5 = 11$
  - $3\ X1 + 4\ X2 + 2\ X3 + X6 = 8$
  - $X1, X2, X3, X4, X5, X6 \geq 0$

On va utiliser deux types de représentations, la première sous forme de **dictionnaire**, la seconde sous forme de **tableau**.

X4	=	5	-	2 X1	-	3 X2	-	1 X3
X5	=	11	-	4 X1	-	1 X2	-	2 X3
X6	=	8	-	3 X1	-	4 X2	-	2 X3
Z	=	0	+	5 X1	+	4 X2	+	3 X3

B		X1	X2	X3	X4	X5	X6
X4	5	2	3	1	1	0	0
X5	11	4	1	2	0	1	0
X6	8	3	4	2	0	0	1
	Z-0	5	4	3	0	0	0

Algorithme : Initialisation

À partir d'une solution réalisable (X1, ..., X6), on veut trouver une meilleure solution réalisable (X1', ..., X6'), i.e. une solution telle que :

$$5\ X1 + 4\ X2 + 3\ X3 < 5\ X1' + 4\ X2' + 3\ X3'$$

La première solution réalisable que l'on considère est :

- X1, X2, X3 $= 0$
- X4 $= 5$, X5 $= 11$, X6 $= 8$
- Fonction objectif : Z $= 0$

Itération 1 : Choix du pivot

On veut améliorer la solution par augmentation de l'objectif. Pour cela on augmente une des variables X1, X2 ou X3. Par exemple choisissons X1, on a alors Z = 5 X1 :

- X1 = 1 $\Rightarrow$ X4 = 3, X5 = 7, X6 = 5, Z = 5
- X1 = 2 $\Rightarrow$ X4 = 1, X5 = 3, X6 = 2, Z = 10
- X1 = 3 $\Rightarrow$ X4 = -1, X5 = -1, X6 = -1, Z = 15 **Non réalisable**

Quelle est la limite pour augmenter X1 ?

- $X4 \geq 0 \Rightarrow X1 \leq \frac{5}{2}$
- $X5 \geq 0 \Rightarrow X1 \leq \frac{11}{4}$
- $X6 \geq 0 \Rightarrow X1 \leq \frac{8}{3}$

On choisit la variable qui contraint le plus X1, c'est à dire X4.
La **ligne de pivot** est alors celle de X4 et la **colonne de pivot** celle qui correspond à X1.

Itération 1 : Pivot

X4	=	5	-	2 X1	-	3 X2	-	1 X3
X5	=	11	-	4 X1	-	1 X2	-	2 X3
X6	=	8	-	3 X1	-	4 X2	-	2 X3
Z	=	0	+	5 X1	+	4 X2	+	3 X3

B		X1	X2	X3	X4	X5	X6
X4	5	2	3	1	1	0	0
X5	11	4	1	2	0	1	0
X6	8	3	4	2	0	0	1
	Z-0	5	4	3	0	0	0

La nouvelle solution est alors :

- $X1 = \frac{5}{2}$, $X2, X3 = 0$
- $X4 = 0$, $X5 = 1$, $X6 = \frac{1}{2}$
- Fonction objectif : $Z = \frac{25}{2}$

On exprime les variables positives (variables en base) en fonction des variables nulles (variables hors base) et on obtient :

X5	=	1	+	5 X2			+	2 X4
X6	=	$\frac{1}{2}$	+	$\frac{1}{2}$ X2	-	$\frac{1}{2}$ X3	+	$\frac{3}{2}$ X4
X1	=	$\frac{5}{2}$	-	$\frac{3}{2}$ X2	-	$\frac{1}{2}$ X3	-	$\frac{1}{2}$ X4
Z	=	$\frac{25}{2}$	-	$\frac{7}{2}$ X2	+	$\frac{1}{2}$ X3	-	$\frac{5}{2}$ X4

B		X1	X2	X3	X4	X5	X6
X5	1	0	-5	0	-2	1	0
X6	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-3}{2}$	0	1
X1	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
	$Z\frac{-25}{2}$	0	$\frac{-7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-5}{2}$	0	0

Dans cette situation, seule la variable X3 possède un coefficient positif, c'est donc la seule qui puisse améliorer la solution.

Itération 2

X5	$=$	1	$+$	5 X2			$+$	2 X4
X6	$=$	$\frac{1}{2}$	$+$	$\frac{1}{2}$ X2	-	$\frac{1}{2}$ X3	$+$	$\frac{3}{2}$ X4
X1	$=$	$\frac{5}{2}$	-	$\frac{3}{2}$ X2	-	$\frac{1}{2}$ X3	-	$\frac{1}{2}$ X4
Z	$=$	$\frac{25}{2}$	-	$\frac{7}{2}$ X2	$+$	$\frac{1}{2}$ X3	-	$\frac{5}{2}$ X4

B		X1	X2	X3	X4	X5	X6
X5	1	0	-5	0	-2	1	0
X6	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-3}{2}$	0	1
X1	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
	Z $\frac{-25}{2}$	0	$\frac{-7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-5}{2}$	0	0

On fait pivoter la variable X3 avec la variable X6.

X5	$=$	1	$+$	5 X2	$+$	2 X4		
X1	$=$	2	-	2 X2	-	2 X4	$+$	1 X6
X3	$=$	1	$+$	1 X2	$+$	3 X4	-	2 X6
Z	$=$	13	-	3 X2	-	1 X4	-	1 X6

B		X1	X2	X3	X4	X5	X6
X5	1	0	-5	0	-2	1	0
X1	2	1	2	0	2	0	-1
X3	1	0	-1	1	-3	0	2
	Z-13	0	-3	0	-1	0	-1

La nouvelle solution est alors :

- $X1 = 2$, $X2 = 0$, $X3 = 1$
- $X4 = 0$, $X5 = 1$, $X6 = 0$
- Fonction objectif : $Z = 13$

Tous les coefficients sont négatifs, augmenter la valeur d'une variable fait diminuer Z. Cette solution est donc **optimale**.

Dictionnaire

On peut réécrire un programme linéaire sous forme standard de la façon suivante :

- **Fonction objectif** :
  - $\max \sum_{j=1\ldots n} c_j x_j$
- **Contraintes** :
  - $e_i = b_i - \sum_{j=1\ldots n} a_{ij} x_j \ (1 \leq i \leq m)$
  - $x_j \geq 0 \ (1 \leq j \leq n)$
  - $e_i \geq 0 \ (1 \leq i \leq m)$

Chaque itération de l'algorithme du simplexe produit un système d'équations linéaires appelé **dictionnaire**. Les équations expriment m variables (variables en base) et la variable Z en fonction des n autres variables (variables hors base).
Un dictionnaire est **réalisable** si en posant à **0** les variables hors base on obtient une **solution réalisable**.

Dictionnaire

Il existe des solutions réalisables qui ne correspondent pas à un dictionnaire mais le simplexe les ignore. Par exemple, pour le problème précédent, la solution suivante est réalisable mais ne correspond pas à un dictionnaire :

- $X1 = 1$, $X2 = 0$, $X3 = 1$
- $X4 = 2$, $X5 = 5$, $X6 = 3$

Remarques

- Les **variables gauches** d'un dictionnaire sont les **variables de base**.
- Les **variables droites** d'un dictionnaire sont les **variables hors base**.
- À chaque itération une variable entre dans la base et une variable sort de la base.
- Le choix de la variable à entrer en base est dicté par l'amélioration de l'objectif Z (en général on choisit la variable de plus haut coefficient).
- Le choix de la variable à sortir de la base est dicté par la nécessité de conserver toutes les variables positives ou nulles.
- On appelle **pivotage** le processus permettant de passer d'un dictionnaire à un autre.

Algorithme du simplexe

Résumé

1. Initialisation : former le dictionnaire (partir d'une base admissible).
2. Chercher à effectuer un pivotage (itération) :
   - Si tous les coefficients des variables de la fonction objectif sont négatifs, l'optimum est atteint.
   - Sinon, choix de la variable entrant en base :
     - Si tous les coefficients de cette variable dans le dictionnaire sont positifs alors il n'y a pas d'optimum fini.
     - Sinon choix de la variable sortant de base puis pivotage.

Correction

- Le problème est la terminaison qui n'est pas garantie à priori.
- **Règle de Bland** : lors d'un pivotage, la variable qui entre est celle d'indice minimal parmi celles qui peuvent entrer, et la variable qui sort est celle d'indice minimal parmi celles qui peuvent sortir.
  Proposition : le simplexe termine avec la règle de Bland.

Itération pour le simplexe lors d'une maximisation

La **variable d'entrée** est une variable hors base dont le coefficient dans la fonction objectif est positif.

La **variable de sortie** est une variable de base dont la non-négativité impose la contrainte la plus forte sur la borne supérieure de la variable d'entrée choisie. Si on ne trouve pas de variable de sortie, l'objectif peut prendre une valeur aussi grande que l'on veut et le problème est donc non borné.

Il est parfois possible de générer une infinité de dictionnaires. Par exemple, dans le programme linéaire suivant, on choisit en entrée la variable dont le coefficient est le plus grand dans la fonction objectif, et en sortie, celle dont l'indice est le plus petit :

- **Fonction objectif** :
  - max 10 X1 - 57 X2 - 9 X3 - 24 X4
- **Contraintes** :
  - 0.5 X1 - 5.5 X2 - 2.5 X3 + 9 X4 $\leq$ 0
  - 0.5 X1 - 1.5 X2 - 0.5 X3 - X4 $\leq$ 0
  - X1 $\leq$ 1

Un cyclage apparaît lorsque l'on retombe sur un même dictionnaire.

Arrêt

Arrêt

La seule façon de ne pas terminer est le cyclage. Il existe des méthodes pour lever le cyclage.

Preuve

Il y a un nombre fini de façons de choisir m variables de base parmi les $n + m$ variables. Il suffit de montrer que deux dictionnaires ayant la même base sont identiques.

Vitesse

Vitesse

- En pratique, on observe que le nombre d'itérations requises est de l'ordre de $\frac{3m}{2}$ où m est le nombre de contraintes (ne dépend donc pas du nombre de variables) : CPLEX, OSL, XPRESS, MPSX, ...
- Quelques exemples pathologiques engendrent un nombre d'itérations exponentiel. Par exemple, ici 2^{n-1} itérations :
  - **Fonction objectif** :
    - $\max \sum_{j=1,\dots,n} 10^{n-j} x_j$
  - **Contraintes** :
    - $2 \sum_{j=1,\dots,i-1} 10^{i-j} x_j + x_i \leq 100^{i-1}$ $(i = 1, \dots, n)$
    - $x_j \geq 0$ $(j = 1, \dots, n)$

Cas particulier : Pas de dictionnaire initial réalisable

On considère un programme linéaire en forme standard. Soient x_j pour $j = 1, \dots, n$ les variables hors base et e_i pour $i = 1, \dots, m$ les variables de base. Si la solution $x_j = 0, \forall j$ et $e_i = b_i, \forall i$ n'est pas admissible, il faut introduire une nouvelle phase (appelée phase 1) au simplexe.

Création d'un nouveau dictionnaire

Dans tous les cas où $b_i < 0$, on remplace $b_i = e_i + \sum_{j=1,\dots,n} a_{ij}x_j$ par $b_i = e_i - \mathbf{r_k} + \sum_{j=1,\dots,n} a_{ij}x_j$. On introduit une variable artificielle différente pour chaque équation pour laquelle la variable d'écart serait négative pour une solution de base initiale. C'est à dire dans les cas problématiques.

On construit alors le dictionnaire initial pour la **phase 1** en gardant en base les p variables artificielles introduites et les variables d'écart qui ne sont pas problématiques.

Cas particulier : Résolution

Phase 1

Après avoir construit le nouveau dictionnaire, on cherche à résoudre, avec l'algorithme du simplexe, le problème $\max z' = -\sum_{k=1,\dots,p} r_k$ où on exprime les variables r_k en fonction des variables hors base.
Si $z' = 0$ quand le simplexe a convergé (toutes les variables artificielles sont nulles), on est ramené au problème initial et on dispose d'une solution de base admissible pour celui-ci.

Phase 2

On applique l'algorithme du simplexe pour maximiser z en utilisant comme solution initiale la solution obtenue à la fin de la phase 1.
Dans le cas général, on ne fait que la phase 2.

Cas particulier : Exemple

Soit le problème initial :

- **Fonction objectif** :
  - max $Z = X1 - X2 + X3$
- **Contraintes** :
  - $2\ X1 - X2 + 2\ X3 \leq 4$
  - $2\ X1 - 3\ X2 + X3 \leq -5$
  - $-\ X1 + X2 - 2\ X3 \leq -1$
  - $X1, X2, X3 \geq 0$

On passe en forme standard :

- **Fonction objectif** :
  - max $Z = X1 - X2 + X3$
- **Contraintes** :
  - $2\ X1 - X2 + 2\ X3 + X4 = 4$
  - $2\ X1 - 3\ X2 + X3 + X5 = -5$
  - $-\ X1 + X2 - 2\ X3 + X6 = -1$
  - $X1, X2, X3, X4, X5, X6 \geq 0$

Le dictionnaire initial n'est pas **réalisable**. Si on fixe $X1, X2, X3 = 0$, on obtient $X5, X6 \leq 0$.

Cas particulier : Exemple (Phase 1)

On définit le problème auxiliaire :

- **Fonction objectif** :
  - max Z' = - X7 - X8 = -6 - X1 + 2 X2 + X3 - X5 - X6
- **Contraintes** :
  - 2 X1 - X2 + 2 X3 + X4 = 4
  - 2 X1 - 3 X2 + X3 + X5 - X7 = -5
  - - X1 + X2 - 2 X3 + X6 - X8 = -1
  - X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,X8 $\geq$ 0

X4	=	4	-	2 X1	+	1 X2	-	2 X3						
X7	=	5	+	2 X1	-	3 X2	+	1 X3	+	1 X5				
X8	=	1	-	1 X1	+	1 X2	-	2 X3			+	1 X6		
Z'	=	-6	-	1 X1	+	2 X2	+	1 X3	-	1 X5	-	1 X6		

B		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X4	4	2	-1	2	1	0	0	0	0
X7	5	-2	3	-1	0	-1	0	1	0
X8	1	1	-1	2	0	0	-1	0	1
	Z'+6	-1	2	1	0	-1	-1	0	0

Cas particulier : Exemple (Phase 1)

X4	=	4	-	2 X1	+	1 X2	-	2 X3				
X7	=	5	+	2 X1	-	3 X2	+	1 X3	+	1 X5		
X8	=	1	-	1 X1	+	1 X2	-	2 X3			+	1 X6
Z'	=	-6	-	1 X1	+	2 X2	+	1 X3	-	1 X5	-	1 X6

B		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X4	4	2	-1	2	1	0	0	0	0
X7	5	-2	3	-1	0	-1	0	1	0
X8	1	1	-1	2	0	0	-1	0	1
	Z'+6	-1	2	1	0	-1	-1	0	0

X4	=	$\frac{17}{3}$	-	$\frac{4}{3}$ X1	-	$\frac{5}{3}$ X3	+	$\frac{1}{3}$ X5			-	$\frac{1}{3}$ X7
X8	=	$\frac{8}{3}$	-	$\frac{1}{3}$ X1	-	$\frac{5}{3}$ X3	+	$\frac{1}{3}$ X5	+	1 X6	-	$\frac{1}{3}$ X7
X2	=	$\frac{5}{3}$	+	$\frac{2}{3}$ X1	+	$\frac{1}{3}$ X3	+	$\frac{1}{3}$ X5			-	$\frac{1}{3}$ X7
Z'	=	$\frac{-8}{3}$	+	$\frac{1}{3}$ X1	+	$\frac{5}{3}$ X3	-	$\frac{1}{3}$ X5	-	1 X6	-	$\frac{2}{3}$ X7

B		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X4	$\frac{17}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
X8	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	1
X2	$\frac{5}{3}$	$\frac{-2}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
	Z'+$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	-1	$\frac{-2}{3}$	0

X4	=	$\frac{17}{3}$	-	$\frac{4}{3}$ X1	-	$\frac{5}{3}$ X3	+	$\frac{1}{3}$ X5			-	$\frac{1}{3}$ X7
X8	=	$\frac{8}{3}$	-	$\frac{1}{3}$ X1	-	$\frac{5}{3}$ X3	+	$\frac{1}{3}$ X5	+	1 X6	-	$\frac{1}{3}$ X7
X2	=	$\frac{5}{3}$	+	$\frac{2}{3}$ X1	+	$\frac{1}{3}$ X3	+	$\frac{1}{3}$ X5			-	$\frac{1}{3}$ X7
Z'	=	$\frac{-8}{3}$	+	$\frac{1}{3}$ X1	+	$\frac{5}{3}$ X3	-	$\frac{1}{3}$ X5	-	1 X6	-	$\frac{2}{3}$ X7

B		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X4	$\frac{17}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
X8	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	1
X2	$\frac{5}{3}$	$\frac{-2}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
	Z'+$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	-1	$\frac{-2}{3}$	0

X4	=	3	-	1 X1			-	1 X6			+	1 X8
X2	=	$\frac{11}{5}$	+	$\frac{3}{5}$ X1	+	$\frac{2}{5}$ X5	+	$\frac{1}{5}$ X6	-	$\frac{2}{5}$ X7	-	$\frac{1}{5}$ X8
X3	=	$\frac{8}{5}$	-	$\frac{1}{5}$ X1	+	$\frac{1}{5}$ X5	+	$\frac{3}{5}$ X6	-	$\frac{1}{5}$ X7	-	$\frac{3}{5}$ X8
Z'	=	0							-	1 X7	-	1 X8

B		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X4	3	1	0	0	1	0	1	0	-1
X2	$\frac{11}{5}$	$\frac{-3}{5}$	1	0	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
X3	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
	Z'-0	0	0	0	0	0	0	-1	-1

Tous les coefficients de Z' sont négatifs ou nuls donc la solution est optimale : Z' = 0 si X7,X8 = 0. Toutes les **variables artificielles sont nulles** et **Z' = 0**, il existe donc une solution réalisable pour le problème initial.

Cas particulier : Exemple (Phase 2)

On obtient un **dictionnaire réalisable** pour le problème initial en annulant X7 et X8 et en exprimant Z = X1 - X2 + X3 en fonction des variables hors base. Ensuite on applique l'algorithme du simplexe classique.

$$\begin{array}{lcl}
X2 & = & \frac{11}{5} + \frac{3}{5}X1 + \frac{2}{5}X5 + \frac{1}{5}X6 \\
X3 & = & \frac{8}{5} - \frac{1}{5}X1 + \frac{1}{5}X5 + \frac{3}{5}X6 \\
X4 & = & 3 - 1\,X1 - 1\,X6 \\
\hline
Z & = & \frac{-3}{5} + \frac{1}{5}X1 - \frac{1}{5}X5 + \frac{2}{5}X6
\end{array}$$

B		X1	X2	X3	X4	X5	X6
X2	$\frac{11}{5}$	$\frac{-3}{5}$	1	0	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$
X3	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-3}{5}$
X4	3	1	0	0	1	0	1
	$Z+\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$

$$\begin{array}{lcl}
X2 & = & \frac{11}{5} + \frac{3}{5}X1 + \frac{2}{5}X5 + \frac{1}{5}X6 \\
X3 & = & \frac{8}{5} - \frac{1}{5}X1 + \frac{1}{5}X5 + \frac{3}{5}X6 \\
X4 & = & 3 - 1\,X1 - 1\,X6 \\
\hline
Z & = & \frac{-3}{5} + \frac{1}{5}X1 - \frac{1}{5}X5 + \frac{2}{5}X6
\end{array}$$

B		X1	X2	X3	X4	X5	X6
X2	$\frac{11}{5}$	$\frac{-3}{5}$	1	0	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$
X3	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-3}{5}$
X4	3	1	0	0	1	0	1
	$Z+\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$

$$\begin{array}{lcl}
X2 & = & \frac{14}{5} + \frac{2}{5}X1 - \frac{1}{5}X4 + \frac{2}{5}X5 \\
X3 & = & \frac{17}{5} - \frac{4}{5}X1 - \frac{3}{5}X4 + \frac{1}{5}X5 \\
X6 & = & 3 - 1\,X1 - 1\,X4 \\
\hline
Z & = & \frac{3}{5} - \frac{1}{5}X1 - \frac{2}{5}X4 - \frac{1}{5}X5
\end{array}$$

B		X1	X2	X3	X4	X5	X6
X2	$\frac{14}{5}$	$\frac{-2}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{-2}{5}$	0
X3	$\frac{17}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0
X6	3	1	0	0	1	0	1
	$Z\frac{-3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0

Tous les coefficients de la fonction objectif sont nuls donc la solution optimale est atteinte pour $Z = \frac{3}{5}$.

Qu'est-ce qu'un simplexe ?

Un ensemble de vecteurs $y_1, \ldots, y_{k+1}$ dans $\mathbb{R}^n$ $(k \leq n)$ est **indépendant au sens affine** si les vecteurs $y_1 - y_{k+1}, y_2 - y_{k+1}, \ldots, y_k - y_{k+1}$ sont linéairement indépendants.

L'enveloppe convexe de $k+1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ indépendants au sens affine est appelée un **simplexe à k dimensions**.

Exemples de simplexes

- Si on considère 3 points dans l'espace, ils sont soit alignés soit les vecteurs qui leur sont associés sont indépendants au sens affine. Ainsi, le **triangle** est un **simplexe à 2 dimensions**.
- La **pyramide** est un **simplexe à 3 dimensions** (donc 4 points).

Base et simplexe

- Géométriquement, on peut associer un simplexe à chaque base.
- On peut interpréter un pivotage (au sens de l'algorithme) comme le pivotage *physique* de ce simplexe.
- C'est de cette interprétation géométrique que viennent les termes **simplexe** et **pivotage**.

Exercice 2

Soit le programme linéaire :

- **Fonction objectif** :
  - max $Z = 1000\ X1 + 1500\ X2$
- **Contraintes** :
  - $8\ X1 + 4\ X2 \leq 160$
  - $4\ X1 + 6\ X2 \leq 120$
  - $X1 \leq 34$
  - $X2 \leq 14$
  - $X1, X2 \geq 0$

Utilisez l'algorithme du simplexe pour trouver la valeur optimale de Z.

Exercice 3

Soit le programme linéaire :

- **Fonction objectif** :
  - max $Z = 5\ X1 + 5\ X2 + 3\ X3$
- **Contraintes** :
  - $X1 + 3\ X2 + X3 \leq 3$
  - $-X1 + 3\ X3 \leq 2$
  - $2\ X1 - X2 + 2\ X3 \leq 4$
  - $2\ X1 + 3\ X2 - X3 \leq 2$
  - $X1, X2, X3 \geq 0$

Utilisez l'algorithme du simplexe pour trouver la valeur optimale de Z.

Exercice 4

Soit le programme linéaire :

- **Fonction objectif** :
  - max $Z = 1000\ X1 + 1200\ X2$
- **Contraintes** :
  - $8\ X1 + 4\ X2 \leq 160$
  - $4\ X1 + 6\ X2 \leq 120$
  - $X1 \geq 34$
  - $X2 \geq 14$
  - $X1, X2 \geq 0$

Utilisez l'algorithme du simplexe pour trouver la valeur optimale de Z.

Exercice 5

Soit le programme linéaire :

- **Fonction objectif** :
  - **min** $Z = X1 - X2 + X3$
- **Contraintes** :
  - $X1 + 3\ X2 \geq 4$
  - $X1 + X2 - X3 \leq 10$
  - $X1, X2, X3 \geq 0$

Utilisez l'algorithme du simplexe pour trouver la valeur optimale de Z.