ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Optimisation linéaire

Recherche opérationnelle

GC-SIE

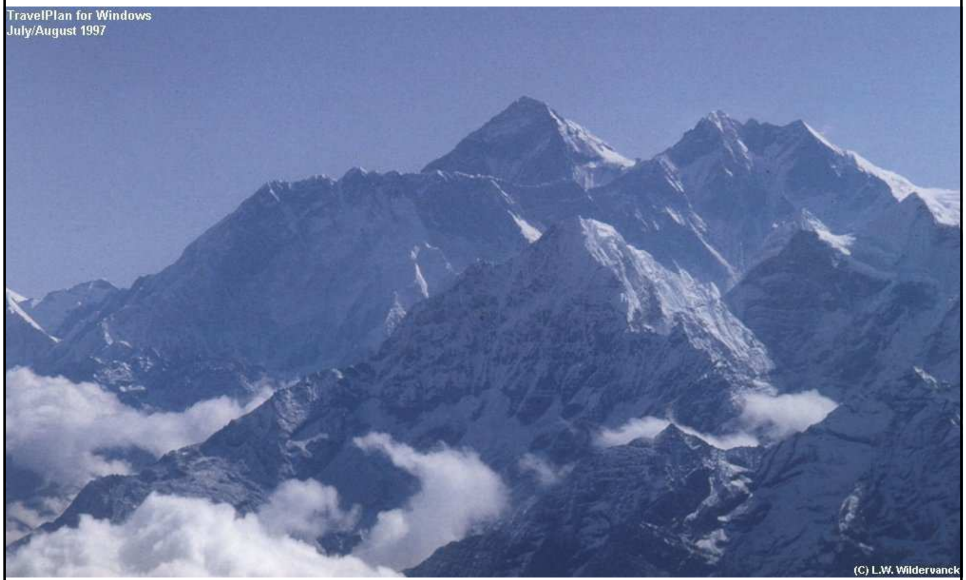
La dualité

Introduction

- Un original offre à un alpiniste un prix lié à l'altitude qu'il peut atteindre : 1F / mètre.
- Cependant, il lui impose de rester en France.
- La solution optimale pour l'alpiniste est de grimper sur le Mont Blanc : 4807m.

Introduction

- Cependant, l'alpiniste aime la liberté, et n'accepte pas d'être contraint à rester en France.
- L'original accepte de retirer la contrainte, mais à condition que l'alpiniste lui paie une amende pour quitter la France.
- Si le montant de l'amende est trop peu élevé, l'alpiniste à intérêt à grimper sur le Mont Everest : 8848 m.



Introduction

- Si l'amende est de 4041 F
- Grimper sur le Mont Blanc lui rapporte 4807 F
- Grimper sur le Mont Everest lui rapporte 8848 F – 4041 F = 4807 F
- L'alpiniste n'a donc plus intérêt à violer la contrainte du problème de départ.

Introduction

Modélisation :

- x = position
- f(x) = altitude
- a(x) = amende si on est en x.
- Premier problème :
  - max f(x)
  - sous contrainte x ∈ France
- Second problème :
  - max f(x) – a(x)
  - sans contrainte

Introduction

- Soit le programme linéaire

  $\min 2x + y$

  s.c. $x + y = 1$

  $x, y \geq 0$
- Solution : $x = 0$, $y = 1$
- Coût optimum : 1
- On introduit un prix p associé à la contrainte $x + y = 1$.

Introduction

$\min 2x + y + p\,(1 - x - y)$

s.c. $x,y \geq 0$

Notes :

- Violer la contrainte n'est pas nécessairement pénalisant.
- La solution de ce problème ne peut pas être moins bonne que celle du problème initial.

Introduction

$\min 2x + y + p\,(1 - x - y)$

s.c. $x, y \geq 0$

$p = 0$

$\min 2x + y$

s.c. $x, y \geq 0$

Solution : $x = y = 0$.

Coût optimum : 0

Introduction

- Dans ce cas, on a intérêt à violer la contrainte du problème initial pour obtenir un meilleur coût.

Introduction

min $2x + y + p\,(1 - x - y)$

s.c. $x,y \geq 0$

$p = 2$

min $2\,x + y + 2 - 2x - 2y = -y+2$

s.c. $x,\ y \geq 0$

Solution : $y = +\infty$, x quelconque.

Coût optimum : $-\infty$.

Introduction

- Dans ce cas, le problème devient non borné. Le prix est certainement non adapté.
- Situation à éviter.
- Comment ? En mettant des contraintes sur les prix.

Introduction

$\min 2x + y + p\,(1 - x - y)$

s.c. $x,y \geq 0$

$p = 1$

$\min 2\,x + y + 1 - x - y = x+1$

s.c. $x,\ y \geq 0$

Solution : $x = 0$, y quelconque.

Coût optimum : 1.

Introduction

- Dans ce cas, quelque soit la valeur de y, pas moyen d'obtenir un coût meilleur que le coût optimal du problème initial.
- La contrainte n'est plus « contraignante ».
- Il n'y a aucun avantage à la violer.

Introduction

Idée :

- Supprimer des contraintes pour simplifier le problème.
- Affecter des prix à la violation de ces contraintes.
- Interdire les prix qui rendent le problème non borné.

Introduction

- Si c* est le coût optimum du problème de départ.
- Si g(p) est le coût optimum du problème relaxé avec le prix p.
- On a toujours $g(p) \leq c^*$.
- La situation est donc plus avantageuse.
- On désire trouver les prix pour que l'avantage lié à la relaxation des contraintes soit minimal.
- On doit donc trouver p qui maximise g(p).

Le problème dual

- Soit le programme linéaire

$$\begin{array}{rrcl} \min & c^T x & & \\ \text{s.c.} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

- **Il est appelé le problème primal.**
- **Le problème relaxé est**

$$\begin{array}{l} \min c^T x + p^T(b - Ax) \\ \text{s.c.} \;\; x \geq 0 \end{array}$$

Le problème dual

- Soit g(p) le coût optimal du problème relaxé.
- Soit x* solution optimale du problème primal.

$$\begin{array}{rcl} g(p) & = & \min_{x \geq 0} \left[c^T x + p^T(b - Ax)\right] \\ & \leq & c^T x^* + p^T(b - Ax^*) \\ & \leq & c^T x^* \end{array}$$

Le problème dual

$$g(p) \leq c^T x^* \quad \forall p$$

- La solution du problème relaxé ne peut pas être moins bonne que la solution du problème primal.
- On veut maintenant calculer le prix tel que $g(p)$ soit maximal.
- En programmation linéaire, on arrive à trouver p^* pour que

$$g(p^*) = c^T x^*$$

Le problème dual

- Si on choisit p^* comme prix pour le problème relaxé, il n'y a plus aucun intérêt à violer les contraintes.
- Résoudre le problème relaxé est donc équivalent à résoudre le problème primal.
- Question : comment déterminer p^* ?

Le problème dual

$$g(p) = \min_{x\geq 0}\left[c^Tx + p^T(b - Ax)\right]$$
$$= p^Tb + \min_{x\geq 0}(c^T - p^TA)x$$

Le problème

$\min (c^T - p^TA)\, x$

est trivial à résoudre :

Si $(c^T - p^TA) \geq 0$, alors $\min (c^T - p^TA)\, x = 0$

Sinon, $\min (c^T - p^TA)\, x = -\infty$

cas à éviter

Le problème dual

- Pour éviter le cas trivial où le problème est non borné, on impose

$$(c^T - p^TA) \geq 0$$

- c'est-à-dire

$$p^TA \leq c^T$$

- ou encore

$$A^Tp \leq c$$

Le problème dual

- Le problème devient donc

$$\max p^T b$$
$$\text{s.c. } A^T p \leq c$$

- Il s'agit d'un programme linéaire.
- Il est appelé le problème dual.

Le problème dual

Primal	Dual
$\min c^T x$ $\text{s.c. } Ax = b$ $x \geq 0$	$\max p^T b$ $\text{s.c. } A^T p \leq c$

Note :

- Le rôle des vecteurs c et b est échangé

Définition :

- Les variables p représentant le prix sont appelées les variables duales.

Le problème dual

- Considérons maintenant le problème primal

  min $c^T x$

  s.c. $Ax \leq b$

  $x \geq 0$
- Introduisons les variables d'écart

  min $c^T x$

  s.c. $Ax + y = b$

  $x, y \geq 0$

Le problème dual

- Sous forme matricielle, on peut écrire

$$\min \begin{pmatrix} c^T \,|\, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{s.c. } \begin{pmatrix} A \,|\, I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b$$

$$x, y \geq 0$$

Le problème dual

- On obtient le problème

  $\min d^T z$

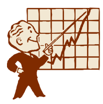
  $\text{s.c. } Fz = b$

  $z \geq 0$

avec

- $z^T = (x^T \mid y^T)$
- $d^T = (c^T \mid 0)$
- $F = (A \mid I)$

Le problème dual



- Problème dual

  $\max p^T b$

  $\text{s.c. } F^T p \leq d$

avec

- $d = (c\ 0)^T$
- $F = (A \mid I)$

Le problème dual

Primal	Dual
$\min c^T x$	$\max p^T b$
s.c. $Ax \leq b$	s.c. $A^T p \leq c$
$x \geq 0$	$p \leq 0$

Note :

- En présence de contraintes d'inégalité, il faut imposer une contrainte de signe sur les prix.

Le problème dual

- Considérons maintenant le problème primal

  $\min c^T x$

  s.c. $Ax = b$

  $x \in \mathbb{R}^n$

  et calculons son dual.

Le problème dual

$$g(p) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[c^T x + p^T (b - Ax) \right]$$
$$= p^T b + \min_{x \in \mathbb{R}^n} (c^T - p^T A) x$$

Le problème

$\min\ (c^T - p^T A)\, x$

est trivial à résoudre :

Si $(c^T - p^T A) = 0$, alors $\min\ (c^T - p^T A)\, x = 0$

Sinon, $\min\ (c^T - p^T A)\, x = -\infty$

Le problème dual

- Pour éviter le cas trivial où le problème est non borné, on impose

$$(c^T - p^T A) = 0$$

- c'est-à-dire

$$p^T A = c^T$$

- ou encore

$$A^T p = c$$

Le problème dual

- Le problème devient donc

$$\max p^T b$$
$$\text{s.c. } A^T p = c$$

Primal	Dual
$\min c^T x$ $\text{s.c. } Ax = b$ $x \in \mathbb{R}^n$	$\max p^T b$ $\text{s.c. } A^T p = c$

Le problème dual

Résumé :

- On dispose d'un vecteur de prix p (les variables duales).
- Pour chaque p, on peut obtenir une borne inférieure sur le coût optimal du primal.
- Le problème dual consiste à trouver la meilleure borne.
- Pour certains p, la borne est $-\infty$, et n'apporte donc aucune information pertinente.

Le problème dual

Résumé (suite) :

- On maximise uniquement sur les p qui produisent une borne finie.
- C'est ce qui génère les contraintes du problème dual.
- A chaque contrainte du primal (autres que les contraintes de signe) est associée une variable duale.

Le problème dual

- Soit A une matrice
- Notons a_i les lignes de la matrice
- Notons A_i les colonnes de la matrice

Le problème dual

PRIMAL **DUAL**

$$
\begin{array}{llllll}
\min c^T x & & & & \\
\text{s.c.} & a_i^T x & \geq & b_i & i \in M_1 \\
 & a_i^T x & \leq & b_i & i \in M_2 \\
 & a_i^T x & = & b_i & i \in M_3 \\
 & x_j & \geq & 0 & j \in N_1 \\
 & x_j & \leq & 0 & j \in N_2 \\
 & x_j & \in & \mathbb{R} & j \in N_3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\max p^T b & & & & \\
 & p_i & \geq & 0 & i \in M_1 \\
 & p_i & \leq & 0 & i \in M_2 \\
 & p_i & \in & \mathbb{R} & i \in M_3 \\
 & p^T A_j & \leq & c_j & j \in N_1 \\
 & p^T A_j & \geq & c_j & j \in N_2 \\
 & p^T A_j & = & c_j & j \in N_3
\end{array}
$$

Le problème dual

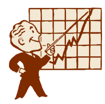
PRIMAL	min	max	DUAL
contraintes	$\geq b_i$	≥ 0	variables
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	libre	
variables	≥ 0	$\leq c_j$	contraintes
	≤ 0	$\geq c_j$	
	libre	$= c_j$	

Exemple

- Passer du primal au dual

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & & \\
\text{s.c.} & -x_1 + 3x_2 & = & 5 \\
 & 2x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq & 6 \\
 & x_3 & \leq & 4 \\
 & x_1 & \geq & 0 \\
 & x_2 & \leq & 0 \\
 & x_3 & \in & \mathbb{R}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcl}
\max & 5p_1 + 6p_2 + 4p_3 & & \\
 & p_1 & \in & \mathbb{R} \\
 & p_2 & \geq & 0 \\
 & p_3 & \leq & 0 \\
 & -p_1 + 2p_2 & \leq & 1 \\
 & 3p_1 - p_2 & \geq & 2 \\
 & 3p_2 + p_3 & = & 3
\end{array}
$$

Exemple



- Transformer le problème obtenu.
- C’est un programme linéaire

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 5p_1 + 6p_2 + 4p_3 & & \\
\text{s.c.} & p_1 & \in & \mathbb{R} \\
 & p_2 & \geq & 0 \\
 & p_3 & \leq & 0 \\
 & -p_1 + 2p_2 & \leq & 1 \\
 & 3p_1 - p_2 & \geq & 2 \\
 & 3p_2 + p_3 & = & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcl}
\min & -5x_1 - 6x_2 - 4x_3 & & \\
 & x_1 & \in & \mathbb{R} \\
 & x_2 & \geq & 0 \\
 & x_3 & \leq & 0 \\
 & x_1 - 2x_2 & \geq & -1 \\
 & -3x_1 + x_2 & \leq & -2 \\
 & -3x_2 - x_3 & = & -3
\end{array}
$$

Exemple

- Calculer le dual du dual

$$
\begin{array}{llcl}
\min & -5x_1 - 6x_2 - 4x_3 & & \\
\text{s.c.} & x_1 & \in & \mathbb{R} \\
& x_2 & \geq & 0 \\
& x_3 & \leq & 0 \\
& x_1 - 2x_2 & \geq & -1 \\
& -3x_1 + x_2 & \leq & -2 \\
& -3x_2 - x_3 & = & -3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\max -p_1 - 2p_2 - 3p_3 & & \\
p_1 - 3p_2 & = & -5 \\
-2p_1 + p_2 - 3p_3 & \leq & -6 \\
-p_3 & \geq & -4 \\
p_1 & \geq & 0 \\
p_2 & \leq & 0 \\
p_3 & \in & \mathbb{R}
\end{array}
$$

Exemple

- Transformer le problème

$$
\begin{array}{llcl}
\max & -p_1 - 2p_2 - 3p_3 & & \\
\text{s.c.} & p_1 - 3p_2 & = & -5 \\
& -2p_1 + p_2 - 3p_3 & \leq & -6 \\
& -p_3 & \geq & -4 \\
& p_1 & \geq & 0 \\
& p_2 & \leq & 0 \\
& p_3 & \in & \mathbb{R}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\min x_1 + 2x_2 + 3x_3 & & \\
-x_1 + 3x_2 & = & 5 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq & 6 \\
x_3 & \leq & 4 \\
x_1 & \geq & 0 \\
x_2 & \leq & 0 \\
x_3 & \in & \mathbb{R}
\end{array}
$$

- **C'est le problème de départ.**

Le problème dual

- Soit un programme linéaire P. Soit D son dual. Le dual de D est le programme P.
- Le dual du dual est le primal.

Le problème dual

- Considérons le problème suivant

Primal		Dual
min $c^T x$		max $p^T b$
s.c. $Ax \geq b$	M_1	s.c. $p \geq 0$
$x \in IR$	N_3	$A^T p = c$

- **Introduisons les variables d'écart dans le primal, et déterminons le dual**

Le problème dual

Primal		Dual
min $c^T x + 0^T y$		max $p^T b$
s.c. $Ax - y = b$	M_3	s.c. $p \in IR$
$x \in IR$	N_3	$A^T p = c$
$y \geq 0$	N_1	$-p \leq 0$

- Remplaçons maintenant les variables du problème original par des variables positives : $x = x^+ - x^-$

Le problème dual

Primal		Dual
min $c^T x^+ - c^T x^-$		max $p^T b$
s.c. $Ax^+ - Ax^- \geq b$	M_1	s.c. $p \geq 0$
$x^+ \geq 0$	N_1	$A^T p \leq c$
$x^- \geq 0$	N_1	$-A^T p \leq -c$

Les trois problèmes primaux sont équivalents
Les trois problèmes duaux sont équivalents

Le problème dual

- Si l'on transforme un programme linéaire P_1 en un programme linéaire P_2 en appliquant une suite de transformations des types suivant :

1. Remplacer une variable libre par la différence de deux variables non négatives.

Le problème dual

2. Remplacer une contrainte d'inégalité par une contrainte d'égalité impliquant des variables d'écart non négatives.
3. Si une ligne de la matrice A d'un problème en forme standard est une combinaison linéaire des autres lignes, éliminer la contrainte d'égalité correspondante.

Alors, le dual de P_1 et le dual de P_2 sont équivalents.

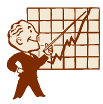
Théorèmes de dualité

Théorème de dualité faible

- Si x est une solution admissible du problème primal.
- Si p est une solution admissible du problème dual.
- Alors

$$p^T b \leq c^T x$$

Théorèmes de dualité



- Soit

$$u_i = p_i(a_i^T x - b_i)$$

- Si $i \in M_1$, $a_i^T x - b_i \geq 0$ et $p_i \geq 0$
- Si $i \in M_2$, $a_i^T x - b_i \leq 0$ et $p_i \leq 0$
- Si $i \in M_3$, $a_i^T x - b_i = 0$ et p_i quelconque
- Donc

$$u_i \geq 0, \forall i$$

Théorèmes de dualité

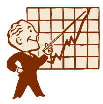
- Soit

$$v_j = (c_j - p^T A_j) x_j$$

- Si $j \in N_1$, $c_j - p^T A_j \geq 0$ et $x_j \geq 0$
- Si $j \in N_2$, $c_j - p^T A_j \leq 0$ et $x_j \leq 0$
- Si $j \in N_3$, $c_j - p^T A_j = 0$ et x_j quelconque
- Donc

$$v_j \geq 0, \forall j$$

Théorèmes de dualité



$$u_i = p_i(a_i^T x - b_i)$$

$$v_j = (c_j - p^T A_j) x_j$$

$$\Sigma_i \, u_i = p^T A x - p^T b$$

$$\Sigma_j \, v_j = c^T x - p^T A x$$

$$0 \leq \Sigma_i \, u_i + \Sigma_j \, v_j = p^T A x - p^T b + c^T x - p^T A x$$

$$0 \leq c^T x - p^T b$$

$$p^T b \leq c^T x$$

Théorèmes de dualité

Corollaires

- Si le coût optimal du primal est $-\infty$, aucun p ne peut vérifier $p^T b \leq c^T x$.
  Le problème dual est donc non admissible.
- Si le coût optimal du dual est $+\infty$, aucun x ne peut vérifier $p^T b \leq c^T x$.
  Le problème primal est donc non admissible.

Théorèmes de dualité

Corollaire

- Soit x solution admissible du primal, et p solution admissible du dual.
- Supposons que $c^T x = p^T b$.
- Alors x est solution optimale du primal et p est solution optimale du dual.

Théorèmes de dualité

- Pour tout y primal admissible, on a
  $$p^Tb \leq c^Ty.$$
- Or, $p^Tb = c^Tx$. Donc,
  $$c^Tx \leq c^Ty,$$
- et x est optimal.
- Pour tout q dual admissible, on a
  $$q^Tb \leq c^Tx.$$
- Or, $p^Tb = c^Tx$. Donc,
  $$q^Tb \leq p^Tb,$$
- et p est optimal.

Théorèmes de dualité

Théorème de dualité forte

- Si un programme linéaire possède une solution optimale,
- Alors
  - son dual également et
  - les coûts optimaux respectifs sont égaux.

Théorèmes de dualité

- Considérons le problème en forme standard

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.c.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- **Supposons que A soit de rang plein.**
- **Appliquons la méthode du simplexe avec la règle de Bland.**

Théorèmes de dualité

- La méthode du simplexe se termine avec une solution optimale x et une matrice de base associée B.

$$x_B = B^{-1}b$$

- Les coûts réduits sont non négatifs

$$c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0^T.$$

- Soit p tel que

$$p^T = c_B^T B^{-1}$$

Théorèmes de dualité

$c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0^T$

$c^T - p^T A \geq 0^T$

$p^T A \leq c^T$

$A^T p \leq c$

- p est admissible pour le problème dual

$$\max p^T b$$
$$\text{s.c. } A^T p \leq c$$

Théorèmes de dualité

- De plus,

$$p^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B = c^T x.$$

- Par le corollaire précédent, p est solution optimale du problème dual.
- Ainsi, le résultat est vrai pour
  - les problèmes en forme standard
  - dont la matrice A est de rang plein.

Théorèmes de dualité

- Pour les autres problèmes, on peut toujours :
  - supprimer les lignes de A correspondant aux contraintes redondantes,
  - transformer le problème en forme standard.
- On a vu que le dual du problème ainsi transformé est équivalent au dual du problème initial. Le résultat reste donc valable.

Théorèmes de dualité

Note :

- En prenant $p^T = c_B^T B^{-1}$, la condition d'optimalité du primal

$$c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0^T$$

- devient

$$c^T - p^T A \geq 0^T \text{ ou } A^T p \leq c,$$

la condition d'admissibilité du dual.

Théorèmes de dualité

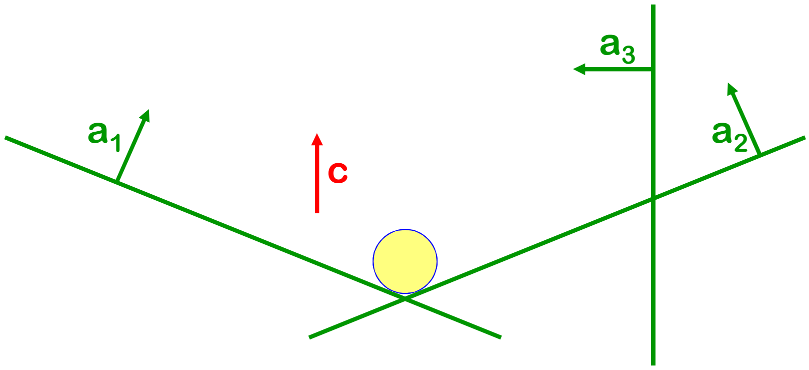
- Pour un problème de programmation linéaire, exactement une des possibilités suivantes peut exister :
  - Il y a une solution optimale.
  - Le problème est non borné.
  - Le problème est non admissible.
- Cela donne 9 combinaisons pour le primal et le dual.
- Par les théorèmes de dualité, certaines d'entre elles sont impossibles.

Théorèmes de dualité

		Primal		
		Optimum fini	**Non borné**	**Non admissible**
Dual	**Optimum fini**	Possible	Impossible	Impossible
	Non borné	Impossible	Impossible	Possible
	Non admissible	Impossible	Possible	*Possible*

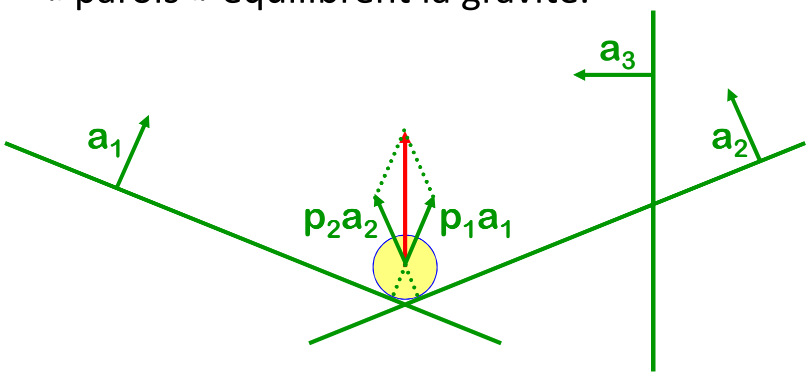
Exemple

- Considérons une balle contrainte à rester dans un polyèdre défini par les contraintes $a_i^T x \geq b_i$.



Exemple

- A l'optimum, les forces appliquées par les « parois » équilibrent la gravité.



Exemple

- A l'optimum, on a donc

  $c = \Sigma_i \, p_i a_i, \; p_i \geq 0$

- Comme les forces ne s'appliquent qu'aux parois en contact avec la balle, on a
  - soit $p_i=0$
  - soit $b_i - a_i^T x = 0$
- Donc $p_i(b_i - a_i^T x)=0$ ou $p_i b_i = p_i a_i^T x$.

Exemple

- On obtient
- $p^T b = \quad \Sigma_i \, p_i b_i$

  $= \quad \Sigma_i \, p_i a_i^T x$

  $= \quad c^T x$

- p est donc une solution optimale du problème dual.

Ecarts complémentaires

Théorème des écarts complémentaires

- Soit x et p des solutions admissibles du primal et du dual (resp.) Les vecteurs x et p sont des solutions optimales des deux problèmes respectifs si et seulement si

$$p_i(a_i^T x - b_i) = 0 \quad \forall i$$

$$(c_j - p^T A_j)x_j = 0 \quad \forall j$$

Ecarts complémentaires

- Pour le théorème de dualité faible, on avait

$$u_i = p_i(a_i^T x - b_i),\ u_i \geq 0$$

$$v_j = (c_j - p^T A_j)x_j,\ v_j \geq 0$$

$$c^T x - p^T b = \Sigma_i\ u_i + \Sigma_j\ v_j$$

- Si x et p sont optimales, alors

$$\Sigma_i\ u_i + \Sigma_j\ v_j = 0$$

et donc $u_i=0,\ \forall i$ et $v_j=0,\ \forall j$

Ecarts complémentaires

- Si u_i=0, $\forall$i et v_j=0, $\forall$j, alors

$$c^T x = p^T b.$$

Par le théorème de dualité forte, x et p sont donc optimales.

Exemple

- Primal :

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{min} & 13x_1 & + & 10x_2 & + & 6x_3 & & \\ \text{s.c.} & 5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \\ & 3x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- **Dual :**

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{max} & 8p_1 & + & 3p_2 & & \\ \text{s.c.} & 5p_1 & + & 3p_2 & \leq & 13 \\ & p_1 & + & p_2 & \leq & 10 \\ & 3p_1 & & & \leq & 6 \end{array}$$

Exemple

- $x^*=(1,0,1)$ solution optimale du primal.
- Construisons la solution optimale duale à partir des conditions des écarts complémentaires.
- La condition
  $$p_i(a_i^T x^*-b_i)=0$$
  est vérifiée car x^* est primal admissible.
- La condition
  $$(c_j-p^T A_j)x_j = 0$$
  est vérifiée pour j=2.

Exemple

- Pour j=1, cette condition devient
  $$5p_1+3p_2=13.$$
- Pour j=3, elle devient
  $$3p_1=6.$$
- Ces deux conditions donnent
  $$p_1=2 \text{ et } p_2=1.$$
- Cette solution est dual admissible.
- Le coût dual est 19, comme le coût primal.

Variables duales et coûts marginaux

- Considérons un problème en forme standard

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.c.}\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- **A est de rang plein**
- **x* est solution de base optimale non dégénérée**
- **B est la matrice de base correspondante**

Variables duales et coûts marginaux

- On a $x_B=B^{-1}b > 0$.
- Remplaçons b par (b+d), où d est une petite perturbation.
- Si d est suffisamment petit, on a

$$B^{-1}(b+d) > 0.$$

- La même base B donne donc une solution de base admissible pour le problème perturbé.

Variables duales et coûts marginaux

- De plus, les coûts réduits

$$c^T - c_B^T B^{-1} A$$

ne sont pas affectés par la perturbation.
- B est donc aussi une base optimale pour le problème perturbé.
- Si p est solution optimale du dual, le coût optimal du problème perturbé est

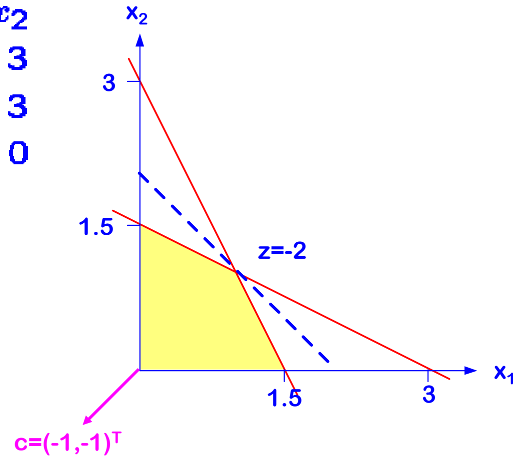
$$c_B^T B^{-1}(b+d) = p^T(b+d) = p^T b + p^T d =$$
$$c^T x^* + p^T d$$

Variables duales et coûts marginaux

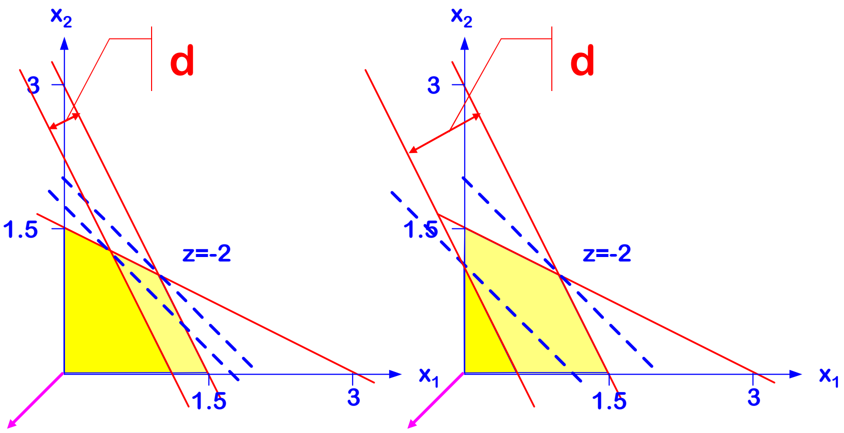
- Les valeurs optimales des variables duales peuvent donc être interprétées comme les coûts marginaux d'une petite perturbation du membre de droite b.

Variables duales et coûts marginaux

$$\min z = -x_1 - x_2$$
$$\text{s.c. } x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$2x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Variables duales et coûts marginaux



Variables duales et coûts marginaux

Notes :

- On perturbe la contrainte

$$2x_1+x_2 \leq 3$$

- Lorsque d est petit, les deux contraintes actives à la solution sont

$$2x_1+x_2 = 3-d$$
$$x_1+2x_2 = 3$$

comme dans le problème original.

- La base optimale est donc la même.

Variables duales et coûts marginaux

- Lorsque d est grand, les deux contraintes actives à la solution sont

$$2x_1+x_2 = 3-d$$
$$x_1= 0.$$

- La base optimale a changé.
- On ne peut plus utiliser les variables duales pour calculer la différence de coût.